CTF现代密码

原创

合天网安实验室 于 2020-10-27 13:11:00 发布 410 收藏 2
分类专栏： CTF 文章标签： 算法 密码学 数学建模 powerdesigner 微软

本文链接：https://blog.csdn.net/qq_38154820/article/details/109324464

前言：

在CTF的密码题目中，RSA以其加密算法之多且应用之广泛，所以在比赛中是最常见的题目。学习密码学并不难，但首先得打好数学基础，并在攻破密码的学习之路上持之以恒。今天我们就来打开RSA加密世界的第一扇门<数论< span="">>。

如果你想深入学习CTF，可点击CTF实验室练习

数论基础：

1.素数

2.公约数与公倍数

3.欧拉函数

4.欧几里得算法

5.扩展欧几里得算法

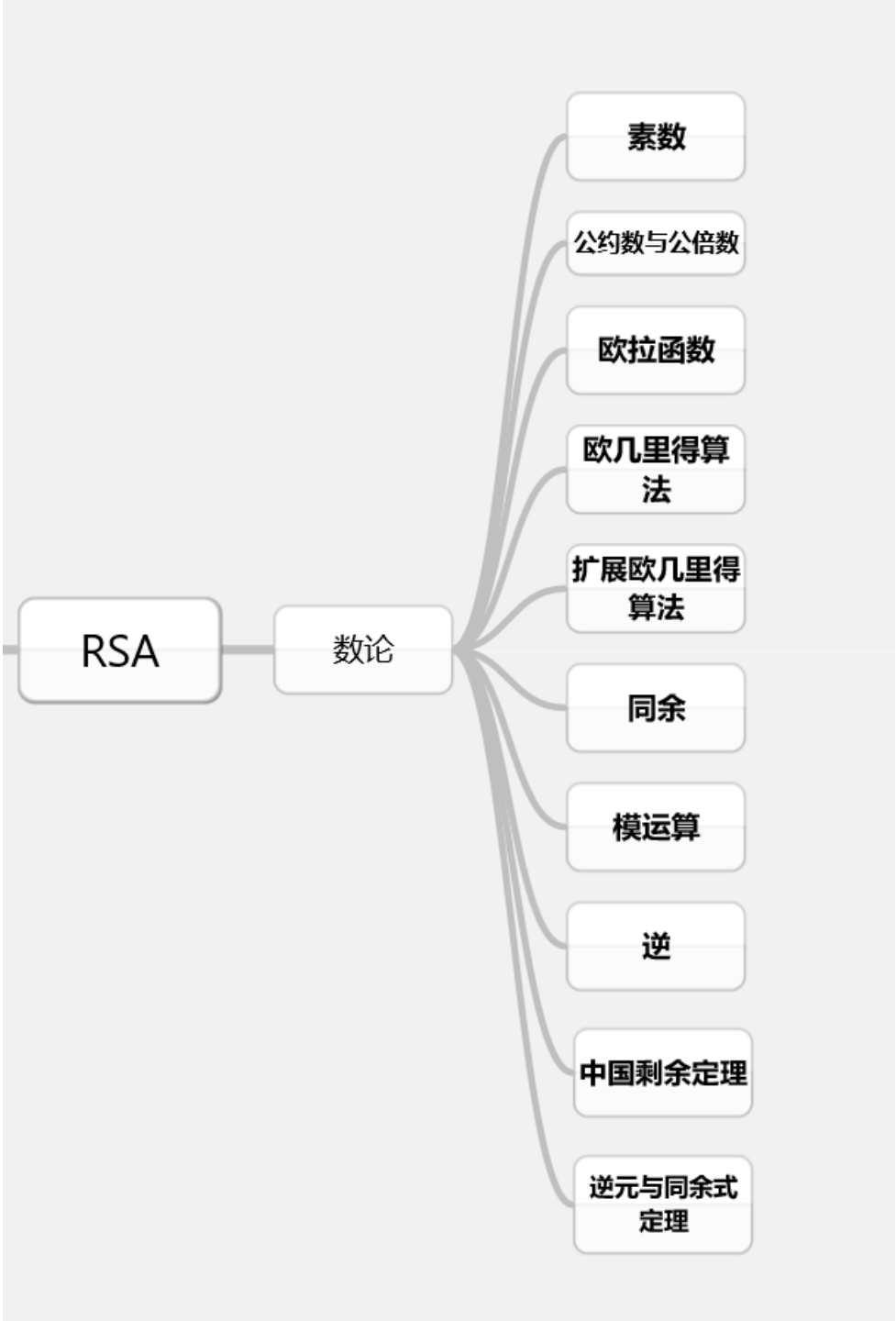
6.同余

7.模运算

8.逆

9.中国剩余定理

10.逆元与同余式定理



1.素数：

定义：

一个大于1的自然数，除了1和它本身外，不能被其他自然数整除（除0以外）的数称之为素数（质数）；否则称为合数。

如：

3×4 = 12,不是素数。

11除了等于11×1以外，不能表示为其它任何两个整数的乘积，所以11是一个素数。

关于素数有以下事实：

（1）如果p是素数，且p | ab（表示ab能被p整除），则p | a或 p | b ,即p 至少整除a与b中的一个。

（2）（算术基本定理）每个整数n ≥ 2 ,均可分解成素数幂之积：

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

若不计因数的顺序，这个分解式是唯一的。其中k ≥ 1，p_i(1 ≤ i ≤k)是两两互不相同的素数，e_i(1 ≤ i ≤k)是正整数。

（3）素数有无穷多个。

2.最大公约数与最小公倍数

定义1：

设a_1，a_2是两个整数。如果 d | a_1且 d | a_2，那么d就称为是a_1 和a_2的公约数（或公因数）我们把a_1 和a_2的公约数中最大的称为a_1 和a_2的最大公约数，记作gcd(a_1,a_2).

当gcd(a_1,a_2) = 1时，我们称a_1和a_2是互素的。

定义2：

设a_1，a_2是两个整数。如果a_1| l 且a_2| l ，那么 l 就称为是a_1 和a_2的公倍数。我们把a_1 和a_2的正的公倍数中的最小的称为a_1 和a_2的最小公倍数，记作$lcm(a_1, a_2)$。

3.欧拉函数

定义：

对正整数n，欧拉函数是小于或等于n 的数中与n 互质的数的个数，

记作：φ(n)。

例如：φ(8) = 4 ,因为1，3，5，7均与8互质。

性质：

(1) 若 n 为一素数 P，则：φ(P) = P-1

(2) 如果P是素数，k≥1则：φ(P^k) = (P-1)× P^{k-1}

例如 ：求φ(16)，由于 16 = 2×2×2×2，故φ(16) = (2-1) ×2^3= 8

(3) 若 n 为任意两个互质的 数a,b的积，则：φ(a*b) = φ(a) ×φ(b)

例：求φ(40)，由于40 = 5×8，所以φ(40) = φ(5) × φ(8) = 4×4 = 16

(4)对于整数n≥2，根据算术基本定理，n可以分解成唯一的形如 n=$p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$的分解式，则：φ(n)=n(1-$\frac{1}{p_1}$)(1-$\frac{1}{p_2}$)…(1-$\frac{1}{p_k}$)

4.欧几里得(Euclid)算法

欧几里得算法又称为辗转相除法，用于求两个数的最大公约数。

原理：GCD(x,y) = GCD(y，x mod y)，x>y

1.python代码实现

```
def  GCD(x,y):
    if(y==0):
        return x
    else:
        return GCD(y,x % y)
```

2.python第三方库：

1gmpy2.gcd(a,b)　　#求a,b的最大公约数

```
from  gmpy2 import*
m = gcd(a,b)      #求a,b的最大公约数
```

2Crypto.Util.number

```
from Crypto.Util.number import*
m = GCD(a,b)      #求a,b的最大公约数
```

5.扩展欧几里得算法

定义：

在已知x，y时，求解一组解a,b，使得ax+by = GCD(x，y)

算法输入：两个正整数x和y

算法输出：x和y的最大公因数gcd(x,y)及满足等式ax+by=gcd(x,y)的整数a和b

python代码实现:

gmpy2库函数gcdext()

```python
#!/usr/bin/python
# -*- coding:utf8
from gmpy2 import*
x = 17
y = 65537

# 扩展欧几里得算法
s = gcdext(x,y)

# 返回元组tuple,满足s[1]*x+s[2]*y = 1
print(s)
#输出 : (mpz(1), mpz(30841), mpz(-8))
print(s[1]*x+s[2]*y)
#输出: 1
```

6.同余

定义：

设a,b是整数，n≠0，如果n|(a-b)，则称a和b模n同余，记为a≡b(mod n)，整数n称为模数。

由于n|(a-b) 等价于 -n|(a-b)，所以a≡b(mod n) 与 a≡b(mod (-n))等价。因此，一般我们总假定模数n≥1。

同余的性质

性质1：

(1)自反性：a ≡ a (mod m)

(2)对称性：a ≡ b (mod m)，↔ b ≡ c (mod m) ↔ a ≡ c (mod m)

性质2：

(1)若a ≡ b (mod m)，c ≡ d (mod m)

则：a±c ≡ b±d (mod m)，ac≡ bd (mod m)

特别的，对于一个整数e,都有a±e≡ b±e (mod m)，ae≡ be (mod m)

(2)若a ≡ b (mod m)，k>0，则ak≡ bk (mod mk)

(3) 若a ≡ b (mod m)，d是a，b的公因数，则$\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \left(mod\ \frac{m}{d}\right)$

(4) 若a ≡ b (mod m)，d|m，d>0，则: a ≡ b (mod d)

(5) 若a ≡ b (mod m)，则:$a^n \models b^n (mod\ \ m)$

(6)(a×b)mod m = (a mod m × b mod m)mod m

(7) a^bmod m = $(a \bmod m)^b$mod m

7.模运算

定义：

a模n的运算给出了a对模n的余数，这种运算称为模运算。注意：模运算的结果是从0到n-1的一个整数。

模运算就像普通的运算一样，它是可交换、可结合、可分配的。而且，对每一个中间结果进行模m运算后再进行模m运算，其作用与先进行全部运算，然后再进行模m运算所得到的结果是一样的。例如：

(a+b)mod m=((a mod m)+(b mod m)) mod m

(a-b)mod m=((a mod m)-(b mod m)) mod m

(a×b)mod m=((a mod m) ×(b mod m)) mod m

(a×(b+c))mod m=((a×b) mod m+(a×c) mod m) mod m

这些性质对于密码学中的数学计算非常的重要，模运算可以将所有中间结果和最后结果限制在一个范围内。对于一个k位的模数n，任何、加、减、乘的中间结果将不会超过2k位长，这样避免了巨大的中间结果，使得计算机能够有效的处理数据。

如：计算a^8(mod n)，不要直接进行7次乘法和一个大数的模运算：

(a×a×a×a×a×a×a×a)mod n

相反，应该进行三次比较小的乘法和三次比较小的模化简：

$$\left((a^2 mod\ n)^2 mod\ n\right)^2 mod\ n$$

这样就可以避免巨大的中间结果出现。

8.逆

定义：

若m≥1，gcd(a,m)=1,则存在c使得：

ca≡1(mod m)

我们把c称为a对模n的逆，记作$a^{-1}(mod\ m)$，在模数已经指明的情况下，有时也记作a^{-1}。

在(a,m)=1时，我们可以使用扩展欧几里得算法来求a的逆元：a^{-1}，这是因为：扩展欧几里得算法可以找到整数x,y使得ax+my=1，这样$a^{-1} = x(mod\ n)$

9.中国剩余定理

中国剩余定理（Chinese remainder theorem，CRT），又称孙子定理，最早可见于中国南北朝时期（公元5世纪）的数学著作《孙子算经》中，为一次同余方程组的起源。

定理(CRT):

设m_1, m_2,……, m_k是两两互素的正整数，M=$m_1 m_2 \ldots m_k$,

$M_i=\frac{M}{m_i}$(i=1,2,…,k),则同余方程组：

$$(S):\begin{cases} x\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x\equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

有唯一解： $x=b_1M_1y_1+b_2M_2y_2+\vdots+b_kM_ky_k \pmod M$

其中$M_iy_i\equiv 1 \pmod{m_i}$，i=1,2, …,k

代码实现：

```python
#!/usr/bin/python
# -*- coding:utf8
from gmpy2 import*
from libnum import*
n1 = 85645293985974960525098755134812345119055712936082535917743523452378767332931088312
n2 = 12222166297277342805260668042066733749258843622057497574551492680820573970618063356
n3 = 50572240344997767935326545161789149545375474106644094036804321085690798567417643620
c1 =20010971557789931948130798983030201950038450269144104532821030667924400788869920238 5
c2 =19200052919818196558567528701224082155105852846109782021681848107226495293687021416 8
c3 =13947215401279226275849937495966032124919137558650399946310414588827169532517600806 3
def CRT(a,n):
    sum = 0
    N = reduce(lambda x,y:x*y,n)   # ni 的乘积

    for n_i, a_i in zip(n,a):    # zip()将对象打包成元组
        N_i = N // n_i
        sum += a_i*N_i*invert(N_i,n_i)
    return sum % N
n =[n1,n2,n3]
c =[c1,c2,c3]

x = CRT(c,n)
m = iroot(x,3)[0]
print(n2s(m))
```

10.逆元与同余式定理

1模运算重要公式：

(a+b) % m = (a % m + b % m) % m

(a-b) % m = (a % m - b % m) % m

(a*b) % m = (a % m * b % m) % m

a^b % m = $(a \ \% \ m)^b$ % m

2威尔逊定理：(wilson’s theorem)

若p为素数，则：(p-1)!≡-1(mod p) □推导：(p-2)!≡1(mod p);

其逆定理同样成立。即：若(p-1)!≡-1(mod p),则p为素数

3二次探测定理：

定义：

若p是素数且 0<< span="">x<< span="">p,则 x^2≡1(mod p)仅有的两个解为：x=1或x=p-1

证明：由于x^2≡1(mod p)，所以：x^2-1≡0(mod p)，即(x+1)(x-1)≡0(mod p)

4费马小定理(Fermat)：

若a为正整数，P是一质数，则：GCD(a,p)=1

那么$a^{p-1} \vDash 1 (\mathrm{mod}\ p)$，推论:$a^p \bmod m \vDash a^{p \bmod (m-1)}$

$a^p \vDash a \bmod p$，推论: $a^p \bmod p$=a mod p

5欧拉定理(Euler)：

若a与m互质，则：$a^{\varphi(m)} \vDash 1 \bmod m$

后记：

数论基础的知识点比较杂乱繁多，这篇文章写的时候尽可能的去精简了，其中的定理及公式是必须要牢记于心的，后面的RSA加密算法的讲述中我会介绍定理及公式在RSA中的应用。

学习完数论基础后，后面我们将开始学习RSA的常见攻击算法及加密原理，以及各种工具的使用和python第三方库的函数调用。