[大学物理实验-0]修约规则和常见的实验数据的处理

原创

Cplus_ruler 于 2021-01-27 19:40:52 发布 2949 收藏 8

文章标签： 物理学 数据分析 概率论

[大学物理实验-0]修约规则和常见的实验数据的处理

前言

大学物理实验中最重要的一部分就是对实验数据的处理，与单次的实验不同，关于实验数据的处理我们会在每一次实验中都碰到。所以学会实验数据的处理格外重要。无论是否是物理专业，我们都应该熟练掌握作为我们在所在专业处理一些数据的依据

测量、误差与不确定度

一、测量

物理实验以测量为基础，所谓测量，就是用合适的工具或仪器，通过科学的方法，将被测物理量与已经标准化的同类物理量进行比较的过程，其比值即为被测物理量的测量值。

测量是人们对自然界中的现象和实体取得定量概念或数字表征的过程。可以分为直接测量和间接测量。前者表示物理量可从仪表刻度直接读出，例如米尺测长度、天平测重量、温度计测温度等。后者表示物理量不能直接由仪表读出，而需要依据待测量和某些直接测量量间的函数关系式求出。例如面积的测量、某地重力加速的测量等。

误差公理（必然性）：实验结果都具有误差，误差自始自终存在于一切科学实验的过程之中。

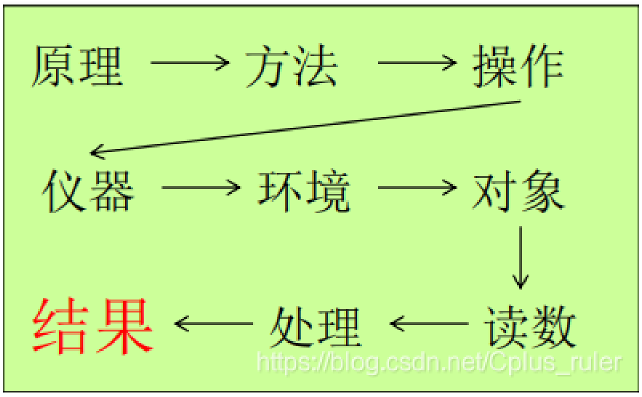


Figure 1

二、误差

误差有两类：系统误差和偶然误差。

系统误差主要来源于：

1、实验理论和方法上的不完善等原因。（理论公式的近似性）
2、测量仪器本身的有限精度或缺陷等原因。（仪器结构不完善）
3、环境的影响或没有在所规定的条件下使用仪器等原因。（环境条件的改变）
4、实验者的习惯与偏向引入的误差等原因。(测量者生理、心理因素的影响)

注意：系统误差的特点是恒定性，不能用增加测量次数的方法使它减小，而因考虑从来源方角度去纠正并加以减小误差。

系统误差有三种形式：

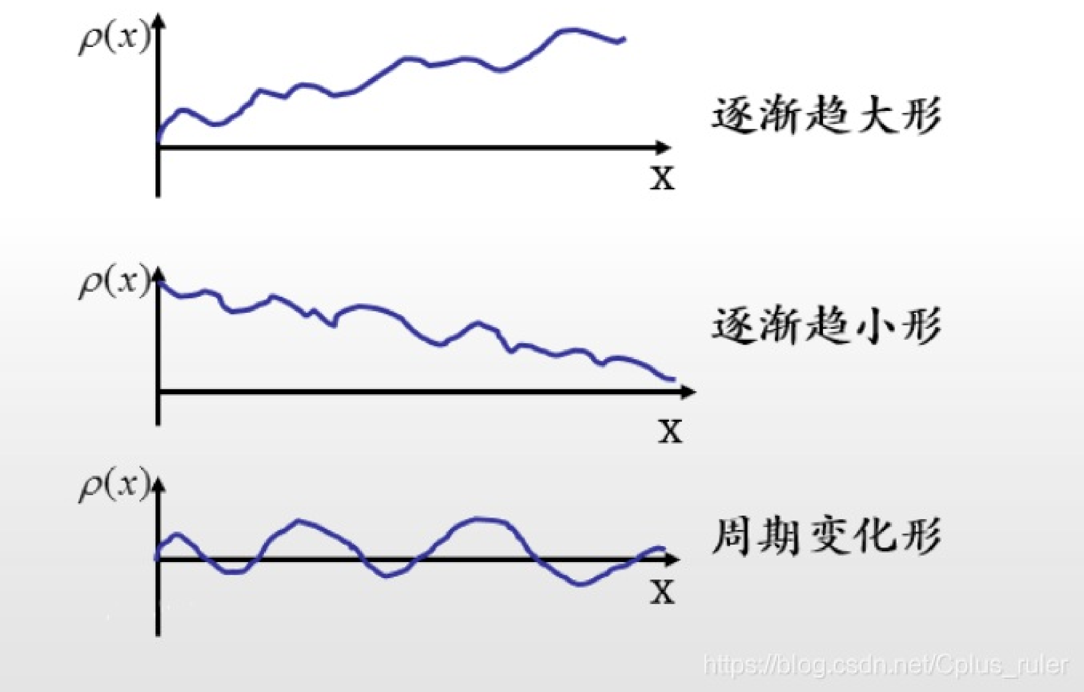


Figure 2

偶然误差（随机误差）：

在相同的条件下,由于偶然的不确定的因素造成每一次测量的无规则的涨落，测量值对真值的偏离时大时小、时正时负，并在忽略了系统误差后仍然如此，这类误差称为偶然误差或随机误差。

误差来源：
1、测量者感觉器官分辨能力上的影响。
2、测量过程中，实验条件和环境因素的微小的、无规则的
起伏变化。

偶然误差有一个很大的特点就是偶然误差正态分布

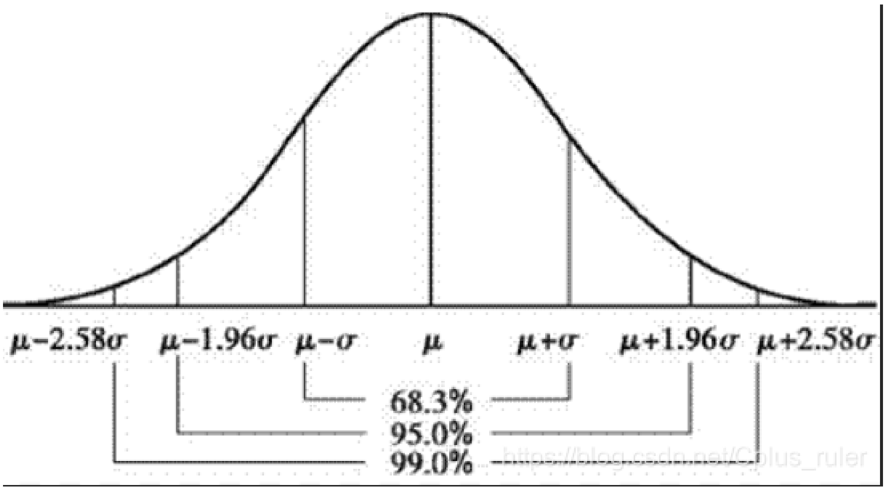
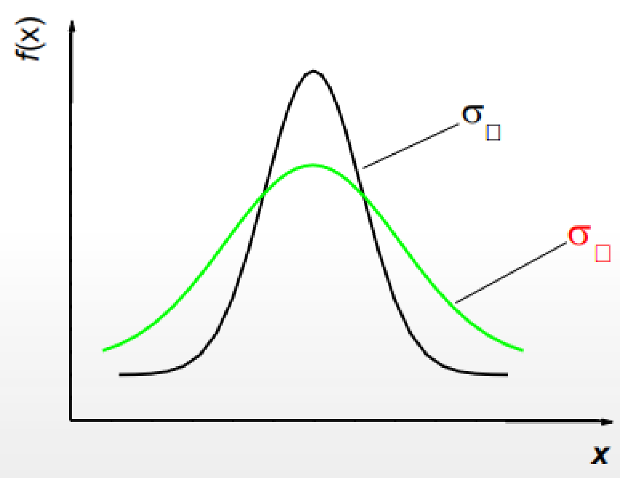


Figure 3
(1) 小误差出现的概率比大误差出现的概率大（单峰性）；
(2) 大小相等的正误差与负误差出现的机会均等（对称性）；
(3) 非常大的误差出现的概率几乎为零（有界性）；
(4) 测量次数很多时，正负误差相互抵消，误差代数和趋近于零（抵偿性）

我们用标准差来衡量测量值的分散程度。标准偏差直接测量标准差的估算



$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n-1}}$$

μ 为真值

σ 为标准差

$f(x)$为x的分布函数

Figure 4

标准差小：表示测得值很密集，随机误差分布范围窄，测量的精密度高；

标准差大：表示测得值很分散，随机误差分布范围宽，测量的精密度低。

公式如下：

（1）算术平均值（近真值） $\bar{N}=\frac{\sum_{i=1}^{n}N_i}{n}$

（2）测量值的标准偏差 $\sigma_N=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(N_i-\bar{N})^2}{n-1}}$

Figure 5

（3）平均值的标准偏差 $\sigma_{\bar{N}}=\frac{\sigma_N}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(N_i-\bar{N})^2}{n(n-1)}}$

Figure 6

置信区间和置信概率

给各位解释一下，所谓置信概率实际上可以粗浅地理解为在测量了一定的次数后，根据测量结果来反推理论结果的一个过程
公式如下：

TABLE 8.4 Summary of confidence intervals for Gaussian and non-Gaussian random variables.

Parameter	Case	Confidence Interval
μ	Gaussian random variable, σ^2 known	$\left[\overline{X}_n - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \overline{X}_n + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\right]$
μ	Non-Gaussian random variable, n large, σ^2 known	$\left[\overline{X}_n - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \overline{X}_n + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\right]$
μ	Gaussian random variable, σ^2 unknown	$\left[\overline{X}_n - t_{\alpha/2,n-1}\hat{\sigma}_n/\sqrt{n}, \overline{X}_n + t_{\alpha/2,n-1}\hat{\sigma}_n/\sqrt{n}\right]$
μ	Non-Gaussian random variable, σ^2 unknown, batch means	$\left[\overline{X}_n - t_{\alpha/2,n-1}\hat{\sigma}_n/\sqrt{n}, \overline{X}_n + t_{\alpha/2,n-1}\hat{\sigma}_n/\sqrt{n}\right]$
σ^2	Gaussian random variable, μ unknown	$\left[\dfrac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}, \dfrac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right]$

Figure 7
给个例题

A voltage X is given by

$$X = v + N,$$

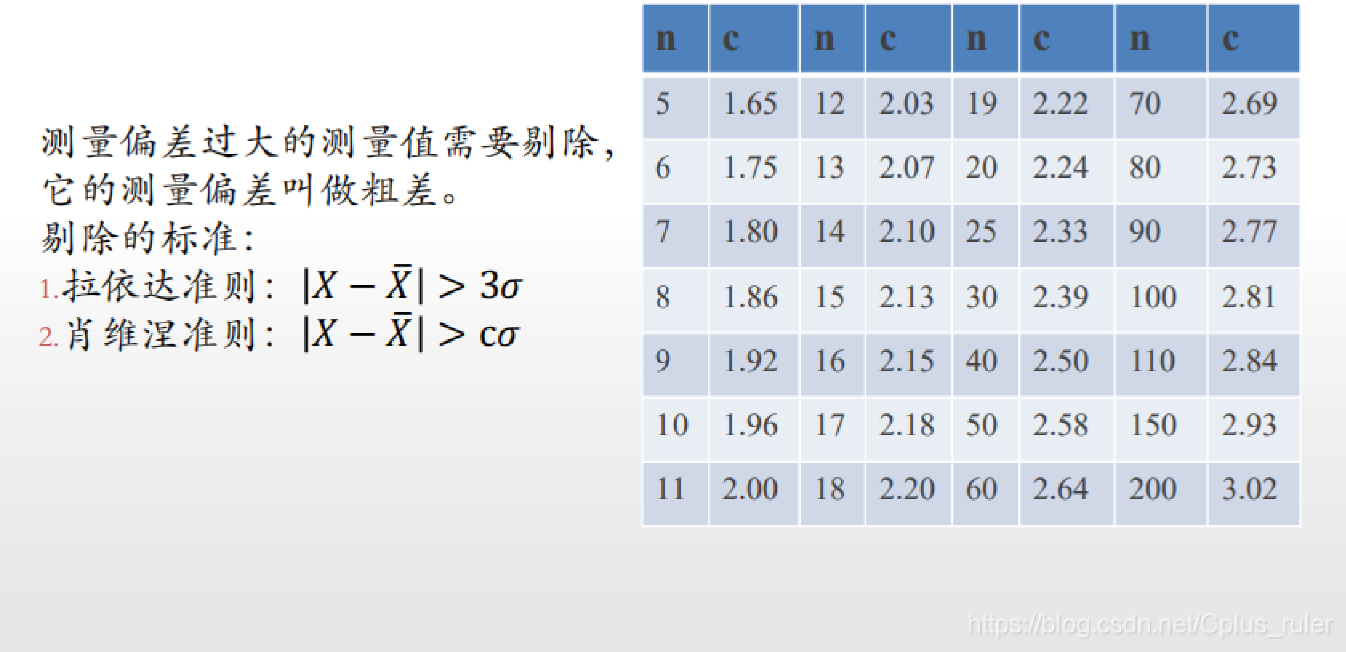
where v is an unknown constant voltage and N is a random noise voltage that has a Gaussian pdf with zero mean, and variance $1\mu V$. Find the 95% confidence interval for v if the voltage X is measured 100 independent times and the sample mean is found to be 5.25 μV.

From Example 4.17, we know that the voltage X is a Gaussian random variable with mean v and variance 1. Thus the 100 measurements $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ are iid Gaussian random variables with mean v and variance 1. The confidence interval is given by Eq. (8.52) with $z_{\alpha/2} = 1.96$:

$$\left[5.25 - \frac{1.96(1)}{10}, 5.25 + \frac{1.96(1)}{10}\right] = [5.05, 5.45].$$

Figure 8
v是需要测量的值，N是高斯分布的一个随机变量（噪音），方差是1微伏，期望为0，已经独立测量了100次，并且得到X的均值为5.25微伏。找置信概率为95%的置信区间。
查表发现符合第一种情况，直接带值进去即可。

粗差的剔除：



n	c	n	c	n	c	n	c
5	1.65	12	2.03	19	2.22	70	2.69
6	1.75	13	2.07	20	2.24	80	2.73
7	1.80	14	2.10	25	2.33	90	2.77
8	1.86	15	2.13	30	2.39	100	2.81
9	1.92	16	2.15	40	2.50	110	2.84
10	1.96	17	2.18	50	2.58	150	2.93
11	2.00	18	2.20	60	2.64	200	3.02

Figure 9
在大量的测量下发现，当n<10时，N的标准偏差明显减小
当n>=10时，标准偏差减小得越来越不明显，最后趋于定值
根据实际情况，一般测量次数为5~10次

接下来是间接误差的传递公式

设N是n个独立的直接测量量A,B,C,...,H的函数

$$N = f(A, B, C, \dots, H)$$

N的算术平均值为

$$\bar{N} = f(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots, \bar{H})$$

N的平均值的标准偏差（绝对误差）为

$$\sigma_{\bar{N}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\sigma_{\bar{A}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\sigma_{\bar{B}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\sigma_{\bar{C}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial H}\sigma_{\bar{H}}\right)^2}$$

N的相对误差为 $E = \frac{\sigma_{\bar{N}}}{\bar{N}}$

Figure 10

对于常见的一些公式大家可以这么操作

函数关系	标准偏差传递公式
$N = A \pm B$	$\sigma_{\bar{N}} = \sqrt{(\sigma_{\bar{A}})^2 + (\sigma_{\bar{B}})^2}$
$N = A \cdot B$或$N = \frac{A}{B}$	$\frac{\sigma_{\bar{N}}}{\bar{N}} = \sqrt{(\frac{\sigma_{\bar{A}}}{\bar{A}})^2 + (\frac{\sigma_{\bar{B}}}{\bar{B}})^2}$
$N = k \cdot A$	$\sigma_{\bar{N}} = \lvert k \rvert \cdot \sigma_{\bar{A}}$
$N = A^p \cdot B^q$	$\frac{\sigma_{\bar{N}}}{\bar{N}} = \sqrt{(\frac{p\sigma_{\bar{A}}}{\bar{A}})^2 + (\frac{q\sigma_{\bar{B}}}{\bar{B}})^2}$
$N = \sin A$	$\sigma_{\bar{N}} = \lvert \cos A \rvert \cdot \sigma_{\bar{A}}$
$N = \cos A$	$\sigma_{\bar{N}} = \lvert \sin A \rvert \cdot \sigma_{\bar{A}}$
$N = \ln A$	$\sigma_{\bar{N}} = \frac{1}{A} \cdot \sigma_{\bar{A}}$

1.求出各直接测量量的平均值和标准偏差；

2.根据公式求出间接测量量的标准偏差或相对误差；

3.用各量的平均值求出间接测量量的平均值。利用平均值间接测量量的标准偏差或相对误差。

Figure 11

不确定度

不确定度是由于测量误差存在而对被测量值不能确定的程度。它反映了不确定度是一定置信概率下的误差限值, 反映了可能存在的误差分布范围。

$$N = \bar{N} \pm U(\text{单位}), \quad U_r = \pm\frac{U}{\bar{N}}$$

Figure 12
不确定度表示方法

$$U = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2}$$

Figure 13
B 类分量 不能用统计学方法估算的分量，在物理实验中一般指仪器误差，通常，其表征值为

$$\Delta_B = P \cdot \Delta_{仪}$$

Figure 14
P为置信概率，仪器误差则由一下原则确定

1 误差已注明的仪器误差。

2 误差未注明的仪器误差，约定如下：能对最小分度下一位进行估算的，取最小分度值得一半作为仪器误差；不能对最小分度下一位进行估算的仪器，取最小分度作为仪器误差。

Figure 15
A类分量表示为

$$\Delta_A = t_P \cdot \sigma_{\overline{N}}$$

Figure 16
tp的选取与置信概率P的要求有关。给大家一张表

测量次数 n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	∞
$t_{0.683}$	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.05	1.00

$t_{0.90}$	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.90	1.86	1.83	1.81	1.65
$t_{0.95}$	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23	1.96
$t_{0.98}$	6.96	4.54	3.75	3.36	3.14	3.00	2.90	2.82	2.76	2.33
$t_{0.99}$	9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	3.17	2.58

Figure 17

注意：在普通物理实验中，未说明需要考虑B类不确定度时，我们一般只需考虑A类不确定度

实验数据的记录和处理

一、有效数字的读取

有效数字=可靠数字+可疑数字（一位）

如

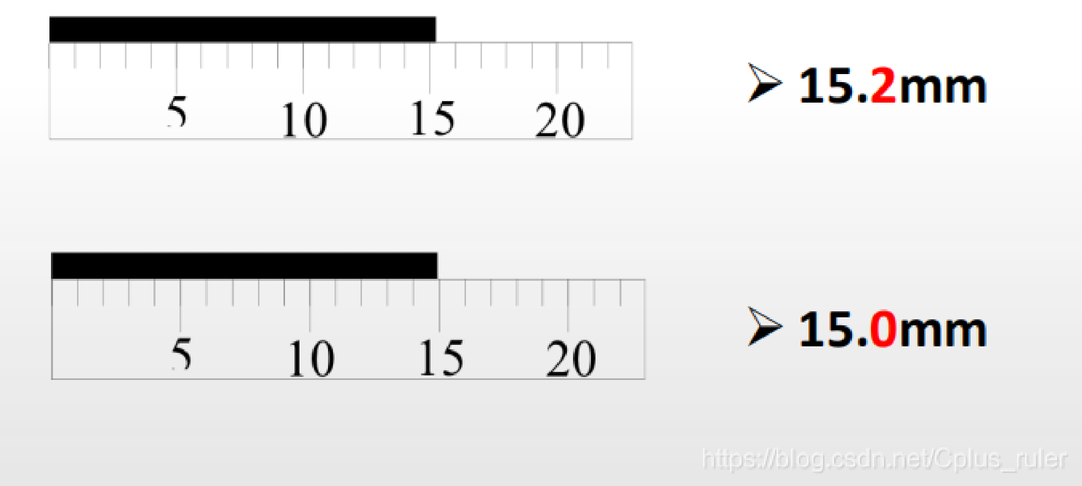


Figure 18

在十进制中，不可以改变有效数字位数

$$632.8\text{nm} = 0.6328\mu\text{m} = 6.328\times10^{-7}\text{m}$$

Figure 19

二、有效数字的运算

加、减法：诸量相加（相减）时，其和（差）数在小数点后 所应保留的位数与诸数中小数点后位数最少的一个相同。

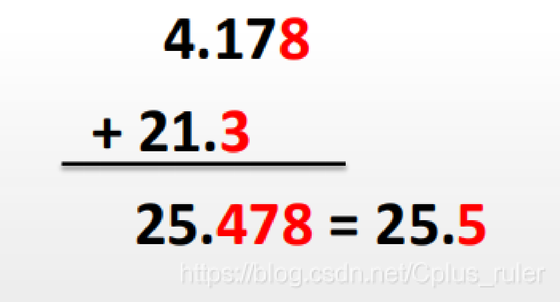


Figure 20

乘、除法：诸量相乘（除）后其积（商）所保留的有效数字， 只须与诸因子中有效数字最少的一个相同。

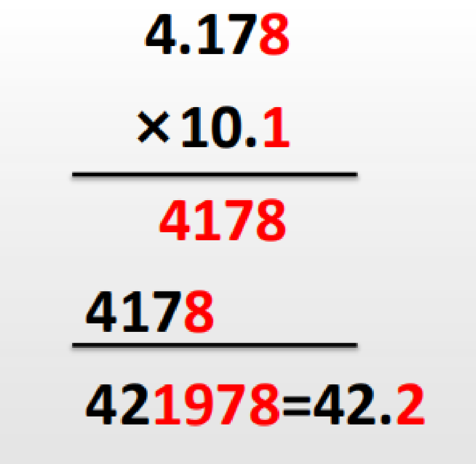


Figure 21

乘方开方: 有效数字与其底的有效数字相同。

复杂运算（对数、三角函数等）结果的有效位数，要根据不确定度的精度来选取，即遵守最后一位与不确定度对齐的原则。

正确数不适用有效数字的运算规则。

常数取与测量值的有效数字相同的位数。（像圆周率就不要傻乎乎地用测量值的规则来取了）

三、有效数字尾数的舍入规则

口诀： 4舍6入5看右，5后有数进上去，尾数为0向左看，左数奇进偶舍弃。

注意：修约讲究一步到位，不可以经过多步修约

四、数据的记录：包含测量值与不确定度

注意：

1.不确定度U通常取1位有效位数，特殊情况下可取2位有效位数。

2.记录测量值项与不确定度项在精度的表示上要相一致。

3.舍取按四舍五入的法则进行。

假设 $\overline{N} = 1.234mm$

1: $U = 0.00\alpha mm$ $\quad N = \left(1.234 \pm 0.00\alpha\right)mm$

$$2:\ U=0.000\alpha mm\begin{cases}\alpha\le 5 & N=(1.2340\pm 0.000\alpha)mm\\ \alpha\ge 6 & N=(1.234\pm 0.001)mm\end{cases}$$

$$3:\ U=0.0\alpha\beta mm\begin{cases}3\le\alpha\le 9 & N=(1.23\pm 0.0\alpha)mm\\ \alpha\le 2 & N=(1.234\pm 0.0\alpha\beta)mm\end{cases}$$

Figure 22

给大家一个完整的例子

例：用米尺对某一长度测量10次，数据如下：L_i=63.57，63.58，63.55，63.56，63.56，63.59，63.55，63.54，63.57，63.57(单位:cm).记录测量结果。$\Delta_{仪}$=0.05cm，置信概率P取0.95.

$$1:\quad \bar{L}=\frac{63.57+63.58+63.55+63.56+63.56+63.59+63.55+63.54+63.57+63.57}{10}$$
$$=63.564cm\approx 63.56cm$$

$$2:\quad \sigma_{\bar{L}}=\sqrt{\frac{(63.564-63.57)^2+(63.564-63.58)^2+\cdots+(63.564-63.57)^2}{}}=0.0048cm$$

$$3:\quad \Delta_A=t_{0.95}\cdot\sigma_{\bar{L}}=2.26\times 0.0048\approx 0.01cm$$
$$\Delta_B=0.95\cdot\Delta_{仪}=0.95\times 0.05\approx 0.048cm$$
$$U=\sqrt{\Delta_A{}^2+\Delta_B{}^2}=\sqrt{0.01^2+0.048^2}\approx 0.05cm$$

$$4:\quad L=\bar{L}\pm U=(63.56\pm 0.05)cm$$

Figure 23

总结（Sum up）

实验数据的处理是一个熟能生巧的问题，建议大家多练练，相信在每次实验之后都会有进步